

Michel Leuenberger

Ein Plädoyer für den Zahlenstrahl

Zusammenfassung

Die Arbeit mit dem Zahlenstrahl bedarf einer guten schrittweisen Einführung. Das Arbeitsmittel ist einfach und es kann von den Schülerinnen und Schülern selbsttätig und kreativ eingesetzt werden. Aus neurologischer Sicht ist es ein sehr sinnvolles Arbeitsmittel, denn wir entwickeln beim Rechnen einen inneren Zahlenstrahl. Durch die Selbsttätigkeit steigt die Erfahrung von Selbstwirksamkeit bei den Lernenden, was bei ihnen zu Freude führen kann. Die Beschäftigung mit dem offenen Zahlenstrahl und dem Zahlenstrich erlaubt eine denkerische Auseinandersetzung mit der Materie. Die mathematischen Strukturen werden sichtbar gemacht und die Lernenden können sich diese einprägen und ihre Basiskompetenzen in Mathematik stärken.

Résumé

Le travail avec la ligne graduée nécessite une introduction progressive. C'est un outil de travail simple qui peut être exploité de manière autonome et créative par les élèves. Du point de vue neurologique, cet outil est tout à fait pertinent car, lorsqu'on compte, on développe une logique linéaire. Le travail en autonomie accroît l'expérience d'efficacité personnelle pour les élèves, ce qui peut leur apporter du plaisir. Se servir de la ligne « ouverte » (c'est-à-dire avec un minimum de repères de graduation) et de la ligne graduée permet de se confronter intellectuellement à la matière. Les structures mathématiques sont ainsi rendues visibles, et les élèves peuvent les assimiler et renforcer leurs compétences de base en mathématique.

Einleitung

Der Zahlenstrahl hat zum Teil einen schlechten Ruf, denn er verführe zum Abzählen, was ja nicht das Ziel des Rechenunterrichtes sein könne. Ausserdem unterstütze er einseitig den ordinalen Zahlenbegriff (Zahlen als Positionen, nicht als Mengen). Im Heilpädagogischen Kommentar zum Zahlenbuch wird klargestellt, er dürfe «nicht als Rechenhilfsmittel» verwendet werden (Schmassmann & Moser, 2014, S. 12). Das muss aber nicht so sein! In meiner Praxis habe ich den Zahlenstrahl sehr erfolgreich eingesetzt. Wesentlich war aber stets, dass ich ihn sorgfältig und zielorientiert einführte.

Zuerst sollte man zwischen drei Varianten des Zahlenstrahls unterscheiden: Der *geschlossene Zahlenstrahl* eignet sich, Gesetzmässigkeiten des dekadischen Systems kennenzulernen. Die Arbeit damit ver-

langt, dass er nicht für blosse Zählübungen verkommt. Man soll ihn nur punktuell verwenden, nicht als Rechenhilfsmittel.

Der *offene Zahlenstrahl* ermöglicht es der Lehrperson und den Kindern, unzählige Denkaufgaben zu erfinden. Er ist offen, das heisst, nicht alle Schritte sind markiert. Er eignet sich auch zum Schätzen.

Mit dem *Zahlenstrich* (leerer Zahlenstrahl) kann die Schülerin oder der Schüler die Rechenwege selbstständig protokollieren. Ausserdem sieht die Lehrperson, wie die Lernenden gerechnet haben.

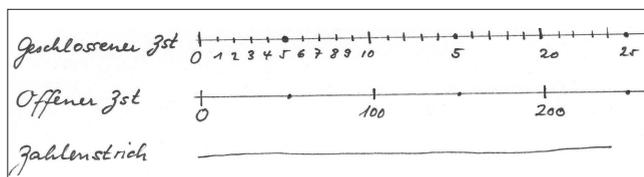


Abbildung 1: Die drei Varianten des Zahlenstrahls

Der Zahlenstrahl und die Neurologie

Zuerst ein kleines Experiment:

Zähle bitte laut von 90 bis 100. Rechne nun $90 + 8$, das gibt ... Rechne nun $98 - 3 = \dots$

Was ist bei dir beim Rechnen auf mentaler Ebene passiert? Du hast beim Addieren in der Vorstellung eine Bewegung nach rechts gemacht, bei der Subtraktion nach links. Ausserdem wusstest du bei 98 automatisch, dass es bis Hundert 2 Schritte nach rechts sind, von 98 bis 95 aber 3 Schritte nach links.

Deine Feststellung entspricht der Erkenntnis der Neurologie, dass Rechnende einen vagen inneren Zahlenstrahl entwickeln – er ist nicht von Anfang an da! – und dass dieser ein wesentlicher Bestandteil beim Rechenprozess ist. Der innere Zahlenstrahl ist entsprechend der Schreibrichtung nach rechts gerichtet, nur selten nach vorne (Dehaene, 1999).

Der Zahlenstrahl als gutes Arbeitsmittel

Ein gutes mathematisches Arbeitsmittel für Rechenanfängerinnen und -anfänger muss folgende Kriterien erfüllen:

- Es ist einfach und unterstützt den Aufbau eines inneren Zahlenstrahls nach rechts.
- Es regt – wenn die Lehrperson die Schülerinnen und Schüler richtig anleitet – zum Denken an. Ich plädiere für ein «Geführtes Entdecken»¹.

¹ «Geführtes Entdecken» ist ein Ausdruck von mir. Inspirieren liess ich mich von Sokrates, der kaum etwas erklärte, sondern die Lernenden durch geschicktes Fragen Schritt für Schritt zur Lösung hinführte. Die lernende Person hat so den Eindruck, selbst auf die Lösung gekommen zu sein. Dies ermöglicht grosse Selbstwirksamkeit und Freude. Ich halte nicht viel von reinem «selbstentdecken den Lernen», bei dem die Schülerin oder der Schüler mit zum Teil schlechten Lösungswegen allein gelassen wird (Felten, 2016).

- Das Arbeitsmittel sollte eine motivierende Selbsttätigkeit und Selbstwirksamkeit ermöglichen, also Freude bereiten.
- Es soll mathematische Strukturen (Kraft der 5, der 10, der 100, der 1000 usw.) sichtbar machen.

Diese vier Kriterien erfüllt der Zahlenstrahl. Ich mache die Erfahrung, dass die selbsttätige Arbeit mit dem Zahlenstrahl Freude bereitet, auch schwächeren Rechnerinnen und Rechnern, die davon stark profitieren.

Aufbau und Ziele der Arbeit am Zahlenstrahl

Ich beschränke mich nun mehrheitlich auf den offenen Zahlenstrahl und den Zahlenstrich. Die Arbeit damit sollte mit den Schülerinnen und Schülern sorgfältig erarbeitet werden.

Als Vorbereitung auf die Arbeit mit dem Zahlenstrahl hat sich das Rechnen mithilfe der Finger bewährt. Wenn das lernende Kind beide Hände vor sich mit den Fingern auf das Pult legt, entsteht ein Fingerbild, das entfernt einem Zahlenstrahl gleicht:

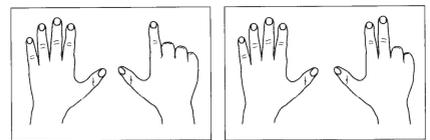


Abbildung 2:
Ein Fingerbild gleicht einem Zahlenstrahl

Zeige mir 7 Finger!

$$5 + 2 = 7$$

$$7 - 2 = 5$$

Zeige mir 8 Finger!

$$5 + ? = 8$$

$$8 + ? = 10$$

Mit etwas Fantasie lassen sich an den Fingern viele anregende Übungen machen, welche zum mathematischen Basisdenken gehören: das Vorwärts- und Rückwärtszählen, ohne abzuzählen; das Zerlegen, Er-

gängen, Addieren (von links nach rechts) und Subtrahieren (von rechts nach links) sowie die Zehnerüberschreitung (dekadisches System verstehen).

Wichtig ist, dass von links nach rechts geübt wird, ausser bei Minus-Rechnungen. Bei $5-3$ im obigen Beispiel sollten zum Beispiel die 3 Finger der rechten Hand eingeklappt werden.

Die Betonung des Längenaspekts

Die einzelnen Ziffern des Zahlenstrahls (1, 2, 3 ...) sollten von Anfang an nicht als Positionen, sondern als Längenaspekt eingeführt werden (Lorenz, 2008; Gaidoschik, 2003). Denn es geht darum, die Zahlen vor allem als Mengen (Kardinalität) zu begreifen. Beispielsweise wäre die 8 auf dem Zahlenstrahl nicht nur ordinal als Position 8 zu verstehen (links davon die 7 und rechts die 9), sondern die Menge 8 (7 wäre 1 Einheit weniger, 9 eine Einheit mehr).

Schritte zählen und Schritte schätzen

Zahlen sollen also bei Rechenanfängerinnen und -anfängern als Längeneinheit dargestellt werden. Als Einstieg eignen sich die eigenen Schritte, die vom Kind selbst protokolliert werden können. Dabei lernt das Kind das Grundprinzip der Kardinalzahl kennen, dass nämlich jede Zahl aus entsprechend vielen Einheiten besteht. 4 ist also beispielsweise $1+1+1+1$. So besteht 5 aus einer Einheit mehr als die 4, die 3 aus einer Einheit weniger.

Das Kind kann vorerst auf einer imaginären Linie schreiten und die eigenen Schritte (Einheits-Strecken) am Boden mit Nummernzetteln markieren. Es sollte bereits jetzt darauf geachtet werden, dass die 5 und die 10 besonders hervorgehoben werden (siehe Abb. 3).

Die folgenden Aufforderungen und Fragen der Lehrperson regen zum Denken an:

Lehrperson: Du beginnst bei null. Was bedeutet die Null hier?

Schülerin: 0 Schritte

Lehrperson: Gehe 3 Schritte, wo bist du jetzt?

Schülerin: Bei der 3.

Lehrperson: Geh nun 1 Schritt weiter. Du bist nun bei der ...

Schülerin: ... 4.

Lehrperson: Was bedeutet die 4?

Schülerin: Ich bin 4 Schritte gegangen.

Lehrperson: Wie weit ist es bis zur 5? Bis zur 10? Was ist die Hälfte von 10 Schritten? usw.

Lassen Sie als Lehrperson und Schülerin bzw. Schüler Ihrer Fantasie freien Lauf. Methodisch hervorragend für die Entwicklung innerer Bilder sind

- das Verbalisieren während des Abschreitens,
- das nachträgliche Erklären und Reflektieren des eigenen Tuns und
- anschliessend das selbständige Protokollieren.

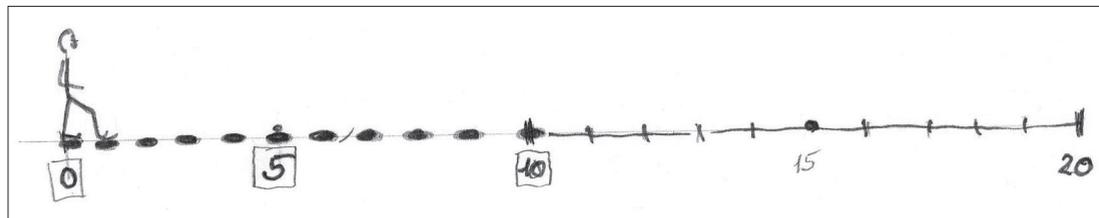


Abbildung 3: Lernende können mit den eigenen Schritten das Grundprinzip der Kardinalzahl verstehen lernen

Das Protokoll von Liza sieht beispielsweise so aus:

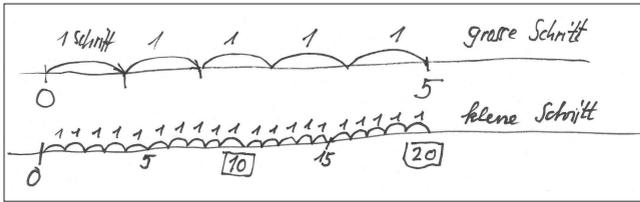


Abbildung 4: Beispiel einer Protokollierung der eigenen Schritte

Die 0, die 5, die 10 usw. werden speziell markiert. Auf dieser ikonischen Stufe lassen sich Rechenwege und Gesetzmässigkeiten gut verbalisieren:

Liza, zeige auf deinem Protokoll zuerst 8 Schritte, dann 3 Schritte. Wie viele Schritte sind es von X nach 5? Du bist 10 Schritte gegangen, wie viele Schritte sind es bis zur 13? Was bedeuten die 1 und die 3 von 13? Was bedeuten die einzelnen Ziffern on 17? Von 21?

Obige Überlegungen lassen sich jeweils als Gleichung im Heft protokollieren: $17 = 10 + 7$, $21 = 10 + 10 + 1$ etc.

Wieso sind es oben weniger Schritte für die gleiche Strecke? Mit dieser Frage wird das Kind zu folgenden Einsichten ange-regt: Je kleiner die Schritte, desto mehr Schritte braucht es für die gleiche Strecke und umgekehrt. Indirekt ist dies eine Vor-bereitung auf das Verstehen von Massein-heiten.

Ersatz für die Schritte:

Haselstecken und 10-cm-Stäbchen

Man sollte nicht zu lange bei den eigenen Schritten bleiben; ein Meter lange Haselste-cken (z. B. mit den Eltern im Wald geschnit-ten) sollen sie ersetzen. Da das Schätzen sehr wichtig für die Bildung von innerem Wissen über Mengen ist, kann zum Beispiel geschätzt werden, wie viele Haselstecken (= Meter) es bis zum Brunnen sind. An-schliessend werden die Stecken gezählt, um die Schätzung zu überprüfen.

Nun ersetzen wir die Haselstecken durch 10 cm lange Holzspiesse. Mit diesen lassen sich auf kleinem Raum kleinere Stre-cken messen.

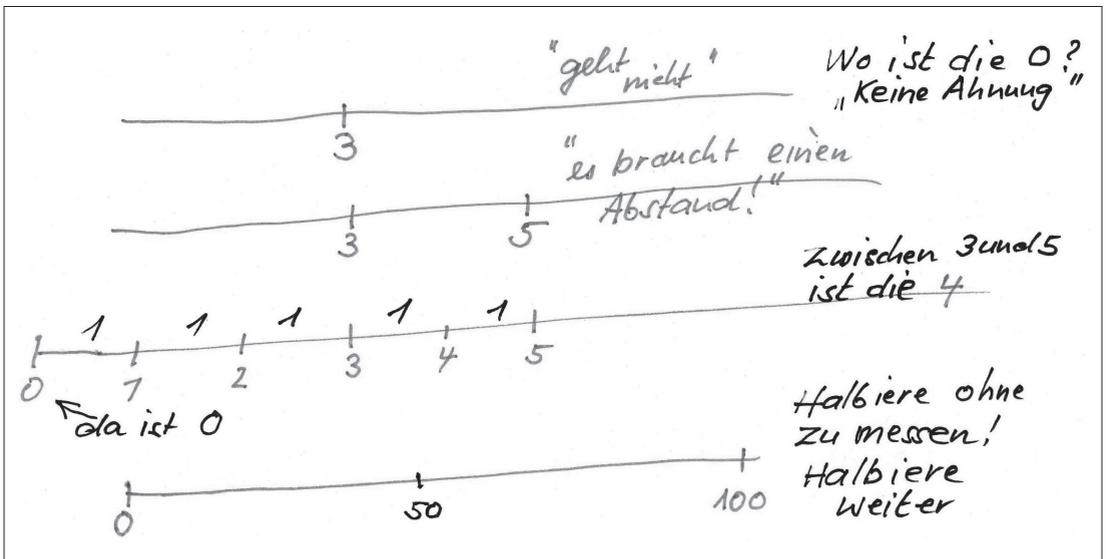


Abbildung 5: Schätzen und Nachdenken am offenen Zahlenstrahl

Zahlenstrich und offener Zahlenstrahl

Schliesslich können auf höherer Abstraktionsstufe zeichnerisch am leeren Zahlenstrahl (Zahlenstrich) und offenen Zahlenstrahl unzählige Übungen gemacht wer-

den zum Verständnis der Zehnerüberschreitung, zum dekadischen System, zum Einüben optimaler Rechenwege und zum Vertiefen grundlegender mathematischer Gesetzmässigkeiten (siehe Abb. 5, 6 & 7).

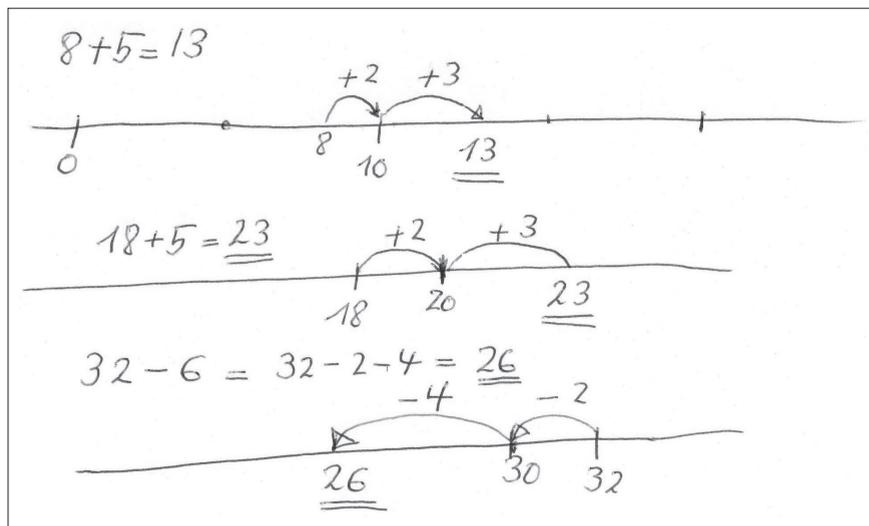


Abbildung 6: Zur Zehnerüber- und -unterschreitung am Zahlenstrahl

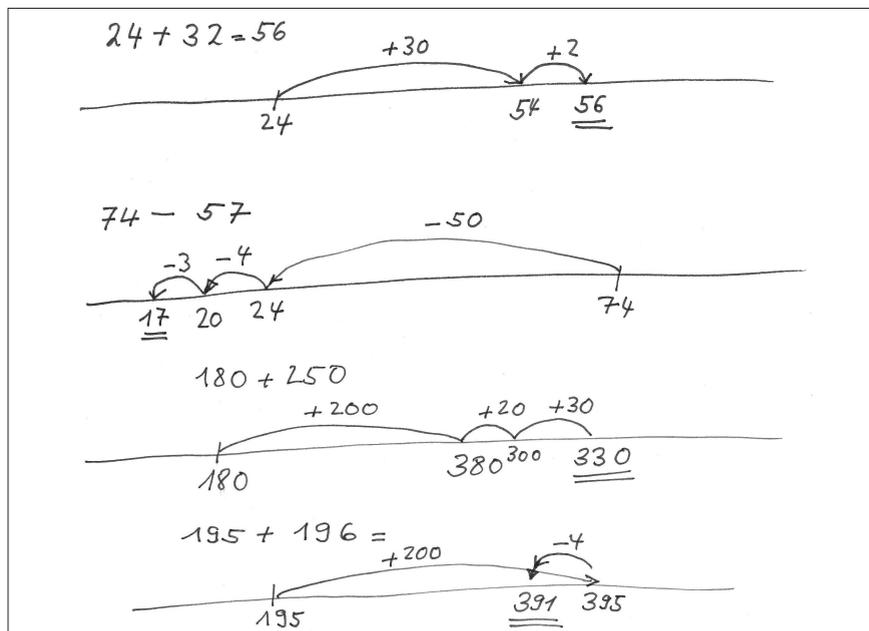


Abbildung 7: Protokollierung von Rechenwegen am Rechenstrich

Dieses Protokollieren sollte immer wieder verbalisiert werden. Gerade für schwächere und sogar Schülerinnen und Schüler mit einer Lernbehinderung erwies sich das Protokollieren einfacher Rechenwege bereits als sehr förderlich.

Wertvoll sind Aufgaben, bei denen herausgefunden werden muss, wie zum Beispiel eine andere Schülerin gerechnet hat, wenn gewisse Angaben beim Protokollieren fehlen: Was hat Julia (siehe Abb. 8) wohl gerechnet?

Der Zahlenstrahl kann bis in die oberen Klassen eingesetzt werden. Er eignet sich besonders beim Aufbau des dekadischen Systems (z. B. Dezimalbrüche), beim Protokollieren von Lösungswegen im Millionenbereich oder bei gewöhnlichen Brüchen (siehe Abb. 9).

Schlechte Rechenwege, wie beispielsweise der von Tania ($83 - 35 = 8 - 3 = 5$, $3 - 5 = 2$, 5 wird zu 50 , $50 - 2 = 48$) lassen sich nicht protokollieren. Probieren Sie es!

Sinnvoll ist es, die erste Menge (83) als Päckchen zu nehmen, dann die Zehner, dann die Einer. Das ist weniger fehleranfällig, weil der Arbeitsspeicher entlastet ist: $83 - 30 = 53$! So lässt sich das Ganze gut protokollieren.

Dieser Artikel hat gezeigt, dass die Arbeit mit dem Zahlenstrahl sehr kreativ sein kann. Ausserdem ermöglicht sie das Verstehen grundlegender mathematischer Fertigkeiten. Meine Erfahrung hat gezeigt, dass viele Schülerinnen und Schüler Spass daran haben.

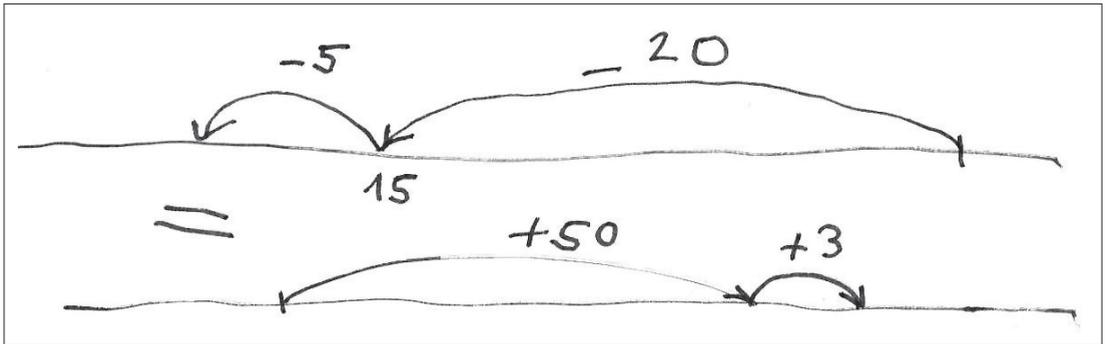


Abbildung 8: In diesem Protokoll-Beispiel fehlen gewisse Angaben

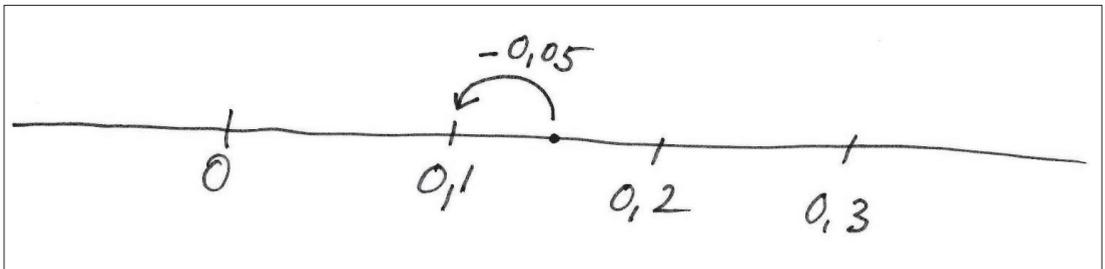
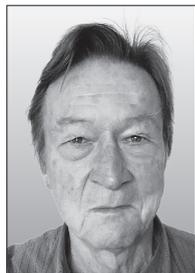


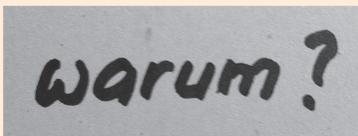
Abbildung 9: Der Zahlenstrahl lässt sich auch bei komplexeren Aufgaben einsetzen

Literatur

Dehaene, S. (1999). *Der Zahlensinn*. Berlin: Birkhäuser.
 Felten, M. (2016). *Nur Lernbegleiter? Unsinn, Lehrer!* Berlin: Cornelsen.
 Gaidoschik, M. (2003). *Rechenschwäche-Dyskalkulie*. Horneburg: Persen.
 Lorenz, J.H. (2008). *Lernschwache Rechner fördern*. Berlin: Cornelsen.
 Schmassmann, M. & Moser Opitz, E. (2014). *Heilpädagogischer Kommentar 3*. Zug: Klett.



Michel Leuenberger, lic. phil.
 Realpstrasse 69
 4054 Basel
 michel.leuenberger@gmx.ch
 www.rechenschwaeche.ch



Warum? Warum? Warum?

- Warum konnte der Neandertaler trotz seines grossen Gehirns nicht rechnen?
- Warum haben gewisse Kinder grosse Schwierigkeiten mit dem Rechnen?
- Warum nützen meine tollen Erklärungen oft nichts?
- Warum schaden gut gemeinte Rechentricks meistens?
- Warum sollte ich die Hundertertafel erst dann einführen, wenn ein Kind das dekadische System versteht?
- Darf ich das Kind an den Fingern rechnen oder zählen lassen?
- Warum ist die Arbeit mit dem offenen Zahlenstrahl oft so spektakulär?
- Wer ist rechenschwach? Das Kind?
- Warum ist das Automatisieren-Lernen der Grundrechnungen so eminent wichtig?

Vielleicht interessieren Dich solche Fragen. Wenn Du neugierig bist und kompetenter werden möchtest, so studiere unsere Website www.rechenschwaeche.ch

Dort findest du die Daten unserer wissenschaftlich fundierten und praxisnahen Weiterbildung.